

$$1) a) A = \{5, 6\} \quad \inf A = 5 = \min A, \quad \sup A = 6 = \max A$$

$$1) b) B = [-2, 5)$$

$$\inf B = -2 = \min B, \quad \sup B = 5, \quad \max A \text{ neexistuje}$$

Dokažme porádne, že $-2 = \inf B$ - ověřme definici

(i) $\forall x \in B: x \geq -2$ - to je pravda (plyne z definice intervalu)

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > -2 \exists x \in B: x < g'$

zvolme $g' \in \mathbb{R}, g' > -2$

pak $\exists x \in (-2, g')$ a proto x platí: $x < g'$

-2 splňuje definici infima, jde tedy o infimum.

Podobně se dokáže, že $5 = \sup B$. 5 ale není maximum, neboť není prvkem množiny B .

Naopak číslo -2 je minimum množiny, neb je infimum a je prvkem množiny B .

$$1) c) C = (-2, 0] \cup \{1\} \cup \underbrace{((2, 4] \cap (3, 4))}_{= (3, 4)} = (-2, 0] \cup \{1\} \cup (3, 4)$$

$$\inf C = -2, \quad \sup C = 4, \quad \min C \text{ a } \max C \nexists$$

$$1) d) D = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$$

nerovnost $q^2 \leq 2$ ^{pravě} splňují čísla, proto ^{pravě} platí: $-\sqrt{2} \leq q \leq \sqrt{2}$

$$\text{Tedy } D = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

kandidátem na $\inf \mathbb{Q}$ je č. $-\sqrt{2}$. ověřme definici infima.

(i) $\forall x \in D: x \geq -\sqrt{2}$ (zřejmé)

(ii) zvol. $g' \in \mathbb{R}, g' > -\sqrt{2}$ zajíma nás, jestli $D \cap (-\sqrt{2}, g')$ obsahuje nějaký prvek
 pokud $g' \geq \sqrt{2}$, pak $D \cap (-\sqrt{2}, g') = D$, což je neprázdná m. (obsahuje 0).
 pokud $g' < \sqrt{2}$, pak $D \cap (-\sqrt{2}, g') = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{2}, g')$, což je též neprázdná množina.

Tedy skutečně $-\sqrt{2} = \inf D$

Podobně $\sup D = \sqrt{2}$

D ale nemá maximum ani minimum, neb $-\sqrt{2}$ ani $\sqrt{2}$ nejsou prvky D
 (jde o racionální čísla).

1, e) definice suprema (viz teorie):

$$\sup(E) = 0, \quad \inf(E) \text{ neexistuje}$$

- protože $\sup(E) \notin E$, tak maximum E neexistuje
- protože $\inf(E) \nexists$, tak minimum E neexistuje

f) a definice suprema:

$$\sup(F) = 0, \quad \inf(F) \text{ neexistuje}$$

- $\sup(F) \in F$, tedy $\max(F) = \sup(F) = 0$
- $\inf(F) \nexists$, pak minimum, neexistuje.
také

g) $\sin(x)$ periodický máme' ano a neko.

- Uvažujme nejprve $x > 0$:

→ pro každé $x_1 \in \mathbb{R}, x_1 > 0$ existuje $x_2 \in \mathbb{R}, x_2 > x_1$
takové, že $\sin(x_2) < 0$, potom x_2 splňuje
nerovnost: $x_2 \cdot \sin(x_2) < 1$ (neboť $x_2 \cdot \sin(x_2)$ záporné!)
a tedy $x_2 \in G$.

Protože toto platí pro libovolné x_1 , neexistuje
ani supremum ani maximum.

- Uvažujme dále $x < 0$:

- pro každé $x_1 \in \mathbb{R}, x_1 < 0$ existuje $x_2 \in \mathbb{R}, x_2 < x_1$
takové, že $\sin(x_2) > 0$, potom x_2 splňuje
nerovnost $x_2 \cdot \sin(x_2) < 1$ (neboť $x_2 \cdot \sin(x_2)$ je záporné)
a tedy $x_2 \in G$.

Protože toto platí pro libovolné x_1 , neexistuje
ani infimum ani minimum.

$$2) a) A = \left\{ \frac{p}{p+q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

• Jelikož $p, q \in \mathbb{N}$, zlomek $\frac{p}{p+q}$ bude vždy kladný. Tedy $\inf A \geq 0$.

Jake nejmenší a největší hodnoty může $\frac{p}{p+q}$ nabývat?

• pokud za p dosadíme 1, máme zlomek $\frac{1}{1+q}$. Čím větší bude q , tím menší bude celkový zlomek. Dokonce se tak dá vyrobit libovolně malé kladné číslo. - Tj. : $\forall \varepsilon > 0 \exists q : \frac{1}{1+q} < \varepsilon$

(za q lze vzít nějaké přirozené číslo větší, než $\frac{1}{\varepsilon} - 1$
(a tak velké přirozené č. určitě $\exists$))

Z toho plyne: $\inf A = 0$

$\min A \nexists$, neboť $0 \notin A$.

• číselník je menší než jmenovatel ve zlomku $\frac{p}{p+q}$ (nebo $q > 0$). Tedy zlomek $\frac{p}{p+q} < 1$ pro libovolné hodnoty p a q . Tedy $\sup A \leq 1$

• zkusme za q vzít 1. Tj. zkusme $\frac{p}{p+1}$. Může být tento zlomek libovolně blízko 1? zvolme $\varepsilon \in (0, 1)$. zkusme najít p t.č. : $\varepsilon < \frac{p}{p+1}$

$$\text{pak } (p+1)\varepsilon < p$$

$$\varepsilon p + \varepsilon < p$$

$$p(\varepsilon - 1) < -\varepsilon$$

$$p > \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \quad \text{-- takové přirozené číslo } p \text{ jistě } \exists$$

$$\text{Tedy } \forall \varepsilon \in (0, 1) \exists p \in \mathbb{N} : \varepsilon < \frac{p}{p+1} < 1.$$

$$\text{Tedy } \underline{\sup A = 1} \quad (\text{definice suprema})$$

ale $1 \notin A$, tedy $\min A \nexists$.

$$2) b) B = \{ \sin x : x \in [0, 2\pi] \}$$

z grafu fce sinus víme, že $B = [-1, 1]$. Tedy $\inf B = \min B = -1$, $\sup B = \max B = 1$

$$2) c) C = \{ \sin x : x \in (0, 2\pi) \}$$

opět z grafu

$$C = (-1, 1)$$

$$\inf C = -1, \sup C = 1, \min C \text{ a } \max C \nexists$$

$$2) d) D = \{ \sin x : x \in (0, \pi) \}$$

$$\text{graf} \Rightarrow D = (0, 1] \Rightarrow \inf D = 0, \min D \nexists, \sup D = \max D = 1$$

$$2) e) E = \{ n^2 - m^2 : m, n \in \mathbb{N} \}$$

• $n=1 \Rightarrow 1-m^2$ - pro libovolně velké m je výraz $1-m^2$ libovolně malý, není zdoła omezený. Proto $\inf E = -\infty$, tedy infimum neexistuje, neb není k němu reálné číslo

graf $y = 1-x^2$ je

$$\bullet m=1 \rightarrow n^2-1$$

podobnou úvahu $\sup E = \infty$

$$\min E \text{ a } \max E \nexists$$

$$\text{tedy } \sup E \nexists$$

f) • Supremum ani maximum neexistuje:

↳ můžeme vzít libovolně velké n a m co nejmenší

• $\inf(F) = \min(F) = 3$:

↳ bereme rozdíl dvou čtverců (druhých mocnin přirozených čísel). Kvůli podmínce $n > m$ víme, že nikdy nebude záporný. Vezmeme tedy nejmenší možné $n > m \in \mathbb{N}$ a to $n=2$ a $m=1$ ($0 \notin \mathbb{N}$).

Pak $n^2 - m^2 = 2^2 - 1^2 = 3$.

g) • infimum ani minimum neexistují:

↳ můžeme vzít libovolně velké m a n co nejmenší

• $\sup(G) = \max(G) = 0$:

↳ Podobnou argumentaci jako u f, jen $n \leq m$ umožní vzít $n=m$.

h) • $\sup(H) = \max(H) = \frac{5}{6}$:

→ víme, že $(\frac{1}{2})^{n_1} > (\frac{1}{2})^{n_2} \Leftrightarrow n_1 < n_2 \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ (totož platí pro $\frac{1}{3}$).

tedy supremum získáme pro $n=1$:

$$2^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

• $\inf(H) = 0$, minimum neexistuje:

→ $2^{-n} + 3^{-n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (s vlastností exponenciály)

→ zároveň ale s pozorování u suprema vyplývá, že pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ dokážeme najít

n_1 , že $\frac{\varepsilon}{2} > (\frac{1}{2})^{n_1}$ a n_2 , že $\frac{\varepsilon}{2} > (\frac{1}{3})^{n_2}$.

Potom vezme $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ a pro

něj platí $0 < 2^{-n_3} + 3^{-n_3} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

tedy $\inf(H) = 0$, ale 0 nenabyváme.

i) • $\sup(I)$ ani $\max(I)$ neexistuje:

→ můžeme brát $n \in \mathbb{Z}$, tedy pro záporné n dostáváme 2 na nějakou kladnou mocninu, což jde do nekonečna (totož pro 3). Tedy i jejich součet nelze shora omezit

• $\inf(I) = 0$, minimum neexistuje:

→ totéž jako u předchozích

j.) • $\sup(I)$ ani $\max(I)$ neexistují, $\inf(I) = 0$,
minimum neexistuje:

velice podobná argumentace jako u předchozího

3) a) $A \cup B$

K množině A jsme přidali čísla z množiny B . Tím se nám v nové vzniklé množině mohlo objevit i číslo, které je větší než $\sup A$. Proto $\sup(A \cup B) \geq \sup A$.

Podobně $\sup(A \cup B) \geq \sup B$.

Proto platí, že $\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A, \sup B\}$.

Dokonce platí, že $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, neboť množina $A \cup B$ nemůže obsahovat něco, co je nad supremem množiny A a supremem množiny B .

Analogicky $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

3) b) $A \cap B$

Podobnými úvahami jako v 3) a). $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$

$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$

3) c) $A \setminus B$

podobně: $\sup(A \setminus B) \leq \sup A$ (neb z mn. A jsme odebrali čísla)

$\inf(A \setminus B) \geq \inf A$

(kdy jsme mohli odebrat čísla, která byla u toho suprema)

3) d) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

3) c) $\Rightarrow \sup(A \Delta B) \leq \sup(A \cup B) \overset{3) a)}{=} \max\{\sup A, \sup B\}$

3) c) $\Rightarrow \inf(A \Delta B) \geq \inf(A \cup B) \overset{3) a)}{=} \min\{\inf A, \inf B\}$

$$3, e) \quad \sup(-A) = -\inf(A) ; \inf(-A) = -\sup(A)$$

$$f) \quad \sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) ; \inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$$

$$g) \quad \sup(A-B) = \sup(A) - \inf(B) ; \inf(A-B) = \inf(A) - \sup(B)$$

$$h) \quad \sup(A \cdot B) = \max \{ \sup(A) \cdot \sup(B), \sup(A) \cdot \inf(B), \inf(A) \cdot \sup(B), \inf(A) \cdot \inf(B) \}$$

$$\inf(A \cdot B) = \min \{ \sup(A) \cdot \sup(B), \sup(A) \cdot \inf(B), \inf(A) \cdot \sup(B), \inf(A) \cdot \inf(B) \}$$

$$4) a) A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 < 16\}$$

$$x^4 < 16 \Rightarrow x \in (-\sqrt[4]{16}, \sqrt[4]{16}) = (-2, 2)$$

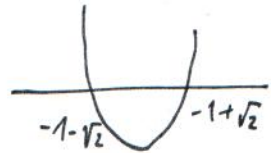
$$\text{tedy } A = (-2, 2), \text{ tedy } \inf A = -2, \min A \nexists, \sup A = 2, \max A \nexists$$

4) b)

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x \leq 1\}$$

$$x^2 + 2x - 1 \leq 0 \quad D = 4 + 4 = 8 \quad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$



$$x \in [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow B = [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}] \Rightarrow \inf B = \min B = -1 - \sqrt{2}, \sup B = \max B = -1 + \sqrt{2}$$

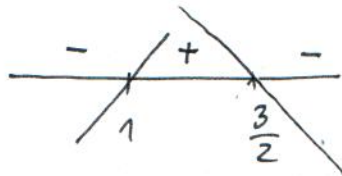
$$4) c) C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-1} > 2\} \quad \text{podmínka: } x \neq 1$$

$$\frac{1}{x-1} - 2 > 0$$

$$\frac{1 - 2(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\frac{1 - 2x + 2}{x-1} > 0$$

$$\frac{3 - 2x}{x-1} > 0$$



$$x \in (1, \frac{3}{2})$$

$$C = (1, \frac{3}{2}) \Rightarrow \inf C = 1, \sup C = \frac{3}{2}, \max C, \min C \nexists$$

$$4) d) D = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{1+n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ sudé} \\ -1, & n \text{ liché} \end{cases}$$

zřejmě $\frac{1}{1+n} \in (0, \frac{1}{2}]$ (největší hodnota, když n nejmenší, tedy $n=1$, nejmenší $n=1$ největší $n \rightarrow \infty$)

$$\text{tedy jistě } (-1)^n + \frac{1}{1+n} \in (-1, \frac{3}{2}]$$

kandidát na infimum: -1 , na supremum: $\frac{3}{2}$

zlomek $\frac{1}{1+n}$ je s rostoucí n čím dál menší

$$(-1)^n + \frac{1}{1+n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n=1 \\ \frac{4}{3}, & n=2 \end{cases}$$

$$\frac{4}{3}, n=2$$

! - další členy jsou jistě menší, než $\frac{4}{3}$

$$\text{tedy } \sup D = \max D = \frac{4}{3}$$

z řešení příkladu 2.9) víme, že zlomek $\frac{1}{1+n}$ se libovolně blíží 0.

Lze se jím tedy vhodně přiblížit nule a to dokonce tak, že $(-1)^n = -1$.

zvolme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Najdeme $n \in \mathbb{N}$ t.ž. $0 < \frac{1}{1+n} < \varepsilon$

potud je n liché, pak $-1 < \frac{1}{1+n} + (-1)^n < -1 + \varepsilon$

a dostáváme se tak libovolně blízko hodnotě -1

je-li n sudé, pak $n+1$ je liché a $-1 < \frac{1}{1+(n+1)} + (-1)^{n+1} < -1 + \varepsilon$

$$\text{tedy } \inf D = -1 \text{ a } \min D \nexists$$

! hodnoty -1 nelze nabýt

4, b) $\sup(E) = \max(E) = \frac{2}{3}$:

→ chci oděíst co nejmenší číslo, volím $n=1$

• $\inf(E) = \frac{1}{2}$, $\min(E)$ neexistuje:

→ chci oděíst co největší číslo: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ je $\frac{1}{2}$.

f) • $\sup(F) = \max(F) = 1$:

→ pro $n=1$ máme $\cos 2\pi = 1$, kosinus se vyšší hodnoty nabyvat nemůže

• $\inf(F) = -1$, minimum neexistuje:

→ pro liché n ~~am~~ „dost velké“

g) • $\sup(G) = 1$, maximum neexistuje:

→ pro n „dost velké“: pro libovolné $\varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N}$:

$$\cos((2m + \frac{1}{2m})\pi) > 1 - \varepsilon \quad \text{pro } \forall m > m_0$$

• $\min(G) = \inf(G) = 0$:

→ pokud zanedbáme periodu ($2m\pi, m \in \mathbb{N}$), pohybují se stále v prvním kvadrantu ($\frac{\pi}{2m} \leq \frac{\pi}{2}, \forall m \in \mathbb{N}$), tedy $\cos$ je nezáporný. Proto $\inf(G) \geq 0$.

Pro $m=1$ ovšem máme $\cos((2 + \frac{1}{2})\pi) = 0$.

h) • $\sup(H) = \max(H) = 1$; $\inf(H) = -1$, minimum neexistuje:

stejná argumentace jako v f)

5) a) Mh. A je omezená $\Rightarrow -\infty < \inf A \leq \sup A < \infty$ (tedy $\sup A$ a $\inf A$ jsou konečná čísla)

pak $|x-y|$ je největší, pokud $x-y$ je největší, což se stane, pokud

x je to největší a y je to nejmenší.

$$\text{Tedy } |x-y| \leq \underbrace{|\sup A - \inf A|}_{\text{definovaný vztah, neb } \sup A, \inf A \in \mathbb{R}, \text{ tedy o reálné číslo}}$$

Našli jsme tedy nějakou horní záhoru množiny B .

zároveň zřejmě $0 \leq |x-y|$ pro libovolné x a y .

Tedy nejmenší horní záhora bude mezi 0 a $|\sup A - \inf A|$, tedy přijde 0 reálné číslo, a proto $\exists \sup B$.

Podobnou úvahou $\exists \inf B$, neb ~~dolní záhora bude~~ ~~ležet~~ mezi

největší z dolních záhor bude mezi 0 a $|\sup A - \inf A|$

5) b) z řešení 5) a) již plyne, že $\sup B \leq |\sup A - \inf A| = \sup A - \inf A$ □
 $\uparrow$
nebo $\sup A - \inf A \geq 0$
z výše uvedené myšlenky plyne, že dokonce nastala rovnost.

5c, $\inf B = 0$: B sestává z výrazů s absolutní hodnotou,
tedy všechny prvky $\geq$ jsou nezáporné.
Pak i $\inf(B) \geq 0$.

Zařazení pokud vezmeme $x=y$, dostaneme $|x-x|=0$,
tedy $0 \in B$ a proto $\inf(B) = \min(B) = 0$.